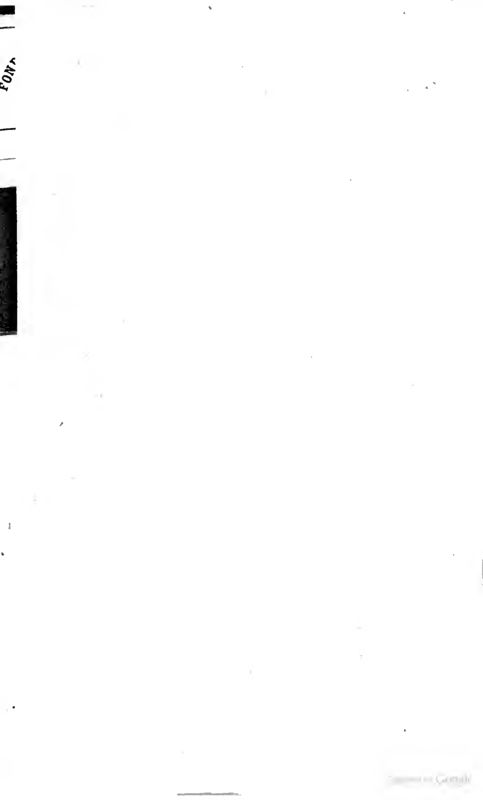

BIBLIOTECA DI ARTIGLIERIA
VITTORIO EM. III


FONDO PIZZOFALCONE


NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
B
40
253
VITTORIO EM. III
NAPOLI


BIBLIOTECA PROVINCIALE
mis. B 40-253
Armadio XXII
Palchetto 14595
Num.° d' ordine 78



EXERCICES ET PROBLÈMES

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL.

Paris. — Imprimerie de Bachelier, rue du Jardinet, 12.

EXERCICES ET PROBLÈMES

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL.

PAR M. F.-D. GREGORY.

TRADUIT DE L'ANGLAIS

Par M. Léonce CLARKE.

Professeur de Mathématiques

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, 55.

1849.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

A

Monsieur Augustin Cauchy,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage

De haute estime, de profond respect et de sincère admiration.



PRÉFACE

DU TRADUCTEUR.

A l'époque où je suivais les cours de la Sorbonne, plusieurs jeunes professeurs, auditeurs des cours, m'engagèrent à traduire les *Exercices et problèmes de calcul différentiel et intégral, publiés en Angleterre par M. F.-D. Gregory*, me disant que cet ouvrage remplirait une lacune dans la bibliothèque du jeune mathématicien. J'avais l'intention de céder dès lors à ces conseils, mais des circonstances imprévues et des voyages me firent retarder ce travail.

J'ai tout lieu de croire que les formules seront trouvées exactes; je les ai vérifiées il y a quelques années, et la comparaison que j'ai faite depuis, de mon manuscrit avec la seconde édition anglaise (revue après la mort de l'auteur par M. W. Walton, professeur à Cambridge), me confirme dans cette opinion.

J'ai conservé dans tout le cours de l'ouvrage la notation anglaise; elle ne diffère essentiellement de la nôtre

nairement, que la plus petite valeur positive. Une autre remarque est que, dans les questions dans lesquelles entrent des fonctions trigonométriques inverses, on considère plus spécialement la longueur linéaire de l'arc que son rapport au quadrant, considéré comme mesure de l'angle droit.

On ne doit jamais perdre de vue que, dans les expressions arc sin x, arc tang x, etc., le rayon est égal à l'unité; au rayon R, elles deviendraient

$$\text{R arc sin}\,\frac{x}{\text{R}},\quad \text{R arc tang}\,\frac{x}{\text{R}},\ldots.$$

Afin de familiariser le lecteur avec la notation anglaise, j'écrirai les équations suivantes:

$$\text{Arc sin}\,\frac{1}{2}=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};\quad \text{arc cos}\,\frac{1}{2}=\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Arc tang}\,1=\text{tang}^{-1}\,1=\frac{\pi}{4};\quad \text{arc séc}\,2=\text{séc}^{-1}\,2=\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Sin}\,(\text{arc sin}\,x)=\sin(\sin^{-1}x)=x.$$

$$\text{Tang}\,(\text{arc tang}\,x)=\text{tang}\,(\text{tang}^{-1}x)=x.$$

$$\text{Arc sin}\,x+\text{arc cos}\,x=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Arc tang}\,x\pm\text{arc tang}\,y=\text{arc tang}\left(\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right).$$

$$\text{Tang}^{-1}x\pm\text{tang}^{-1}y=\text{tang}^{-1}\left(\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right).$$

Je crois être utile au lecteur en insérant ici un tableau mnémonique, pour aider à la différentiation des fonctions quelconques, quelque compliquées qu'elles puissent être: il m'a été d'une grande utilité.

Soient φx, ψx, χx différentes fonctions de x; et, en employant la notation de Lagrange, $\varphi' x$, $\psi' x$, $\chi' x$ leurs coefficients différentiels.

$$(\varphi x + \psi x - \chi x)' = \varphi' x + \psi' x - \chi' x;$$
$$(a\varphi x + b\psi x - c)' = a\varphi' x + b\psi' x.$$
$$(\varphi x \psi x)' = \varphi x \psi' x + \varphi' x \psi x; \quad \left(\frac{\varphi x}{\psi x}\right)' = \frac{\psi x \varphi' x - \varphi x \psi' x}{(\psi x)^2}.$$
$$(\varphi x \psi x \chi x)' = \varphi x \psi x \chi' x + \varphi x \chi x \psi' x + \psi x \chi x \varphi' x.$$
$$[(\varphi x + \psi x)^m]' = m(\varphi x + \psi x)^{m-1}(\varphi' x + \psi' x).$$
$$[(\varphi x)^m]^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(\varphi x)^{m-n}(\varphi x)^{(n)},$$
$$(\sqrt{\varphi x})' = \left[(\varphi x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(\varphi x)^{-\frac{1}{2}}\varphi' x = \frac{\varphi' x}{2\sqrt{\varphi x}},$$
$$\left[\frac{(\varphi x)^{\frac{m}{n}}}{(\psi x)^{\frac{p}{q}}}\right]' = \left[(\varphi x)^{\frac{m}{n}} \cdot (\psi x)^{-\frac{p}{q}}\right]' = \left[\frac{m}{n}\log(\varphi x) - \frac{p}{q}\log(\psi x)\right]' = \ldots$$
$$(\log \varphi x)' = \frac{\varphi' x}{\varphi x}; \quad (\varepsilon^{\varphi x})' = \varepsilon^{\varphi x}\varphi' x; \quad (a^{\varphi x})' = a^{\varphi x}\log a\, \varphi' x.$$
$$(\sin \varphi x)' = \cos \varphi x \cdot \varphi' x; \quad (\cos \varphi x)' = -\sin \varphi x\, \varphi' x.$$
$$(\text{tang}\, \varphi x)' = \frac{\varphi' x}{\cos^2 \varphi x}; \quad (\cot \varphi x)' = -\frac{\varphi' x}{\sin^2 \varphi x}.$$
$$(\sin^{-1} \varphi x)' = \frac{\varphi' x}{[1-(\varphi x)^2]^{\frac{1}{2}}}; \quad (\cos^{-1} \varphi x)' = -\frac{\varphi' x}{[1-(\varphi x)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$
$$(\text{tang}^{-1} \varphi x)' = \frac{\varphi' x}{1+(\varphi x)^2}; \quad (\text{séc}^{-1} \varphi x)' = \frac{\varphi' x}{\varphi x[(\varphi x)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}}.$$
$$[\varphi(\psi x)]' = \varphi'(\psi x) \cdot \psi' x;$$
$$\{\varphi[\psi(\chi x)]\}' = \varphi'(\psi \chi x) \cdot \psi'(\chi x) \cdot \chi' x.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE Ier.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS.

Fonctions d'une variable.

Soit u une fonction explicite de x, d'une forme compliquée, on pourra, généralement, en ramener la différentiation à celle de fonctions plus simples au moyen de la formule

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

en considérant y comme fonction de x, et u comme fonction de y. Cette formule peut s'étendre à un nombre quelconque de fonctions, et l'on peut écrire

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdots \frac{dy}{dx}.$$

Soit

Ex. (1) $u = (a + bx^n)^m$.

C. D.

Posons

$$y = a + bx^n, \quad u = y^m,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = nbx^{n-1}, \quad \frac{du}{dy} = my^{m-1} = m(a + bx^n)^{m-1};$$

donc

$$\frac{du}{dx} = mnbx^{n-1}(a + bx^n)^{m-1}.$$

(2) $$u = \left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{\left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(3) $$u = \varepsilon^{x^n}; \quad \frac{du}{dx} = nx^{n-1}\varepsilon^{x^n}.$$

(4) $$u = \varepsilon^{\sin x}; \quad \frac{du}{dx} = \cos x\, \varepsilon^{\sin x}.$$

(5) $$u = \log\left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(6) $$u = \log(\log x) = \log^2 x; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x \log x}.$$

(7) $$u = \log^n x,$$

ce qui ne signifie pas la $n^{ième}$ puissance de $\log x$, mais le $n^{ième}$ logarithme de cette quantité

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x \log x \log^2 x \ldots \log^{n-1} x}.$$

(8) $$u = \log(\sin x); \quad \frac{du}{dx} = \cot x.$$

(9) $$u = \log\left(\frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{m}{\sin mx}.$$

(10) $$u = \log(\tang x); \quad \frac{du}{dx} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

(11) $u = \cos(\sin x)$; $\dfrac{du}{dx} = -\cos x \sin^2 x$,

$\sin^2 x$ représentant $\sin(\sin x)$.

(12) $u = \sin(\log x)$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}\cos(\log x)$.

(13) (*) $u = \sin^{-1}\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(14) $u = \sin^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{2}{1+x^2}$.

(15) $u = \varepsilon^{\sin^{-1}x}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\varepsilon^{\sin^{-1}x}$.

(16) $u = \cos^{-1}\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a + b\cos x}$.

(17) $u = \sin^{-1}\dfrac{x^2}{a^2}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2x}{(a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}}}$.

(18) $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x^2-a^2}{b^2-a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{x}{[(x^2-a^2)(b^2-x^2)]^{\frac{1}{2}}}$.

(19) $u = \sin^{-1}\dfrac{x-1}{2^{\frac{1}{2}}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(20) $u = \tang^{-1}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right]$; $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

(21) $u = \tang^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{1+x^2}$.

(*) Cette expression et les suivantes seraient écrites dans les auteurs français sous la forme

$$u = \text{arc sin}\,\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}};\quad u = \text{arc sin}\,\frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$u = \varepsilon^{\text{arc sin}\,x}, \ldots$$

(Voyez la préface.)

(22) $u = \tang^{-1} \dfrac{2cx + b}{(4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2} \dfrac{(4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}}{a + bx + cx^2}$.

(23) $u = \tang^{-1} \left(\dfrac{a + bx}{b - a}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2} \dfrac{(b - a)^{\frac{1}{2}}}{(1 + x)(a + bx)^{\frac{1}{2}}}$.

(24) $u = \sin^{-1} \dfrac{x(a - b)^{\frac{1}{2}}}{[a(1 + x^2)]^{\frac{1}{2}}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{(a - b)^{\frac{1}{2}}}{(1 + x^2)(a + bx^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(25) $u = \log \dfrac{\left[(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x\, 2^{\frac{1}{2}}\right]}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{(1 - x^2)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(26) $u = \log\left[x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \text{séc}^{-1} \dfrac{x}{a}$;

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(27) $u = \cos^{-1} x - 2 \dfrac{(1 - x)^{\frac{1}{2}}}{(1 + x)^{\frac{1}{2}}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{(1 - x)^{\frac{1}{2}}}{(1 + x)^{\frac{3}{2}}}$.

(28) $u = \dfrac{\sin x (2 + e \cos x)}{(1 + e \cos x)^2}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{3e + (2 + e^2)\cos x}{(1 + e \cos x)^3}$.

(29) $u = [\sin (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{2}}$; $\dfrac{du}{dx} = - \dfrac{x \cos (a^2 - x^2)}{[\sin (a^2 - x^2)]^{\frac{1}{2}}}$.

(30) $u = \log \cos^{-1} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x}$.

Lorsqu'une fonction consiste en racines et en puissances de produits et de quotients, il est généralement plus simple d'y appliquer les logarithmes et de prendre la *différentielle logarithmique* de la fonction.

Soit

(31) $$u = (a+x)^m (b+x)^n;$$

$$\log u = m \log(a+x) + n \log(b+x);$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{m}{a+x} + \frac{n}{b+x};$$

$$\frac{du}{dx} = (a+x)^m (b+x)^n \left(\frac{m}{a+x} + \frac{n}{b+x}\right).$$

(32) $$u = \left(\frac{x-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(33) $$u = \frac{x^n}{(1+x)^n}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}.$$

(34) $$u = \frac{(x-2)^9}{[(x-1)^5 (x-3)^{11}]^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x-2)^8}{(x-1)^{\frac{7}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}(x^2 - 7x + 1).$$

(35) $$u = \frac{(x+4)^2}{x+2}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

(36) $$u = \frac{[(x+1)(x+3)^9]^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^4};$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2}{(x+2)^5}\left[\frac{(x+3)^7}{x+1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(37) $$u = x^x; \quad \log u = x \log x; \quad \frac{du}{dx} = x^x (1 + \log x).$$

(38) $$u = x^{\sin x}; \quad \frac{du}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x \,.\, \log x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

(39) $u = (\sin x)^m (\cos x)^n;$

$$\frac{du}{dx} = (\sin x)^{m-1} (\cos x)^{n-1} (m \cos^2 x - n \sin^2 x).$$

(40) $u = \frac{(\sin x)^m}{(\cos x)^n}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{(\sin x)^{m-1}}{(\cos x)^{n+1}} (m \cos^2 x + n \sin^2 x).$

(41) $u = \varepsilon^{ax} \sin rx; \quad \frac{du}{dx} = \varepsilon^{ax} (a \sin rx + r \cos rx);$

$$u = \varepsilon^{ax} \cos rx; \quad \frac{du}{dx} = \varepsilon^{ax} (a \cos rx - r \sin rx).$$

(42) $u = \varepsilon^{ax} (\sin rx)^m;$

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon^{ax} (\sin rx)^{m-1} (a \sin rx + mr \cos rx).$$

Fonctions implicites de deux variables.

Lorsque $u = 0$ est une fonction implicite de deux variables, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}.$$

Soit

(43) $x \log y = y \log x,$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left(\frac{y - x \log y}{x - y \log x} \right).$$

(44) $\sin y = x \sin (a + y); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin (a + y)}{\cos y - x \cos (a + y)}.$

(45) $y^n \log y = ax; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y^{n-1} (1 + n \log y)}.$

(46) $\operatorname{tang} y = 1 + x \sin y; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\cos y)^2 \sin y}{1 - x (\cos y)^3}.$

(47) $$\operatorname{tang}\frac{y}{2}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}};$$

en différentiant par logarithmes on trouve

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin y}{1-x^2}=-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(48) $$y=1+xe^y;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}.$$

(49) $$x(1+y)^{\frac{1}{2}}+y(1+x)^{\frac{1}{2}}=0;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y+2(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{\frac{1}{2}}}{x+2(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{\frac{1}{2}}}.$$

(50) $$\sin^{-1}\frac{x}{h}+\sin^{-1}\frac{y}{k}=c;\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{(k^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(51) $$(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{[a^2-2(x^2+y^2)]x}{[b^2+2(x^2+y^2)]y}.$$

(52) $$(a+y)^2(b^2-y^2)-x^2y^2=0;\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y^2(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{y^3+ab^2}.$$

Fonctions de deux ou de plusieurs variables.

(53) $$u=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}};\quad \frac{du}{dx}=\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{du}{dy}=-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$du=\frac{2xy(ydx-xdy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(54) $u = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x + y}$;

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{y - x - 2(xy)^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}(x+y)^2}$; $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{x - y - 2(xy)^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}(x+y)^2}$.

$du = \dfrac{\left[y - x - 2(xy)^{\frac{1}{2}}\right] y^{\frac{1}{2}} dx + \left[x - y - 2(xy)^{\frac{1}{2}}\right] x^{\frac{1}{2}} dy}{2(xy)^{\frac{1}{2}}(x+y)^2}$.

(55) $u = x^y$; $\dfrac{du}{dx} = yx^{y-1}$; $\dfrac{du}{dy} = x^y \log x$;

$du = x^y \left(\dfrac{y}{x} dx + \log x dy\right)$.

(56) $u = \log \left[\dfrac{x + (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{x - (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$; $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2y}{y(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$;

$\dfrac{du}{dy} = -\dfrac{2x}{y(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$; $du = \dfrac{2(ydx - xdy)}{y(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(57) $u = \sin(x^m y^n)$;

$\dfrac{du}{dx} = mx^{m-1} y^n \cos(x^m y^n)$; $\dfrac{du}{dy} = nx^m y^{n-1} \cos(x^m y^n)$;

$du = x^{m-1} y^{n-1} \cos(x^m y^n)(mydx + nxdy)$.

(58) $u = \sin^{-1}\dfrac{x}{y}$; $du = \dfrac{ydx - xdy}{y(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(59) $u = \text{tang}^{-1}\dfrac{x}{y}$; $du = \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$.

(60) $u = \log\left(\text{tang}\dfrac{x}{y}\right)$; $du = \dfrac{2(ydx - xdy)}{x^2 \sin 2\dfrac{x}{y}}$.

(61) $u = \dfrac{\varepsilon^z y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$;

$du = \dfrac{\varepsilon^z y dz}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{x\varepsilon^z(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(62) $$u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2};$$

$$du = \frac{2xydx}{a^2 - z^2} + \frac{x^2 dy}{a^2 - z^2} + \frac{2x^2yzdz}{(a^2 - z^2)^2}.$$

(63) $$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \text{tang}^{-1}\frac{x}{z} + \frac{z^2}{2};$$

$$du = \frac{xdx + ydz + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{zdx - xdz}{x^2 + z^2} + zdz.$$

(64) $$u = \frac{ay - bz}{cz - ax};$$

$$du = \frac{a}{(cz - ax)^2}[(ay - bz)dx + (cz - ax)dy + (bx - cy)dz].$$

CHAPITRE II.

DIFFÉRENTIATIONS SUCCESSIVES.

L'analogie entre les puissances algébriques et les différentielles successives, représentées d'après la notation de Leibnitz, avait été remarquée peu après l'invention du calcul infinitésimal. Leibnitz lui-même s'occupa attentivement de ce sujet, comme on peut le voir par sa correspondance avec Jean Bernoulli; et, dans le cours de ses recherches, il découvrit, par induction, le théorème qui porte son nom. Il eut aussi l'idée des différentielles à indices fractionnaires ou irrationnelles, mais il ne fit aucune recherche à ce sujet. Tout récemment, cette branche de l'analyse a acquis une très-grande importance, et il paraît que c'est de ce côté que nous devons porter nos efforts pour ajouter à nos découvertes analytiques. Je me bornerai, toutefois, dans ce chapitre à des exemples de différentiation à indices entiers. Deux raisons m'y ont engagé : 1° parce qu'il reste encore dans la théorie générale des différentielles successives quelques points qui ne sont pas entièrement fixés, de sorte que le sujet ne peut pas encore faire partie du domaine de l'élève; 2° parce que les principes de cette branche de l'analyse ne se trouvent dans aucun des Traités élémentaires que le lecteur pourrait consulter, et que le développement de ce sujet occuperait trop d'espace pour être traité d'une manière satisfaisante dans un ouvrage comme celui-ci. Ceux qui désireront connaître les résultats des recherches des analystes sur ce sujet, pourront consulter plusieurs Mémoires de M. Liouville dans le *Journal de l'École Poly-*

technique, vol. XIII, et dans le *Journal de Crelle*; deux Mémoires du professeur Kelland dans les *Transactions of the royal Society of Edinburgh*, vol. XIV; le Rapport du professeur Peacock sur les progrès de l'analyse dans les *Transactions of the British Association*; et enfin deux écrits de M. Greatheed dans le *Cambridge Mathematical Journal*, vol. I.

SECTION I. — *Fonctions d'une variable.*

Ex. (1) $u = x^n$; $\dfrac{d^r u}{dx^r} = n(n-1)\ldots(n-r+1)x^{n-r}$.

(2) $u = (a+bx)^n$;

$$\frac{d^r u}{dx^r} = n(n-1)\ldots(n-r+1)\,b^r(a+bx)^{n-r}.$$

(3) $u = \dfrac{1}{x^n}$; $\dfrac{d^r u}{dx^r} = (-)^r n(n+1)\ldots(n+r-1)\dfrac{1}{x^{n+r}}$.

(4) $u = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{d^r u}{dx^r} = (-)^r r(r-1)\ldots 3.2.1.\dfrac{1}{x^{r+1}}$.

(5) $u = a^x$; $\dfrac{d^r u}{dx^r} = (\log a)^r a^x$.

(6) $u = \varepsilon^{nx}$; $\dfrac{d^r u}{dx^r} = n^r \varepsilon^{nx}$.

(7) $u = \sin nx$; $\dfrac{du}{dx} = n\cos nx = n\sin\left(nx + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = n\frac{d}{dx}\cdot\sin\left(nx+\frac{\pi}{2}\right) = n^2\cos\left(nx+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= n^2\sin\left(nx+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = n^2\sin\left(nx+2\frac{\pi}{2}\right).$$

En continuant ainsi, on trouvera

$$\frac{d^r u}{dx^r} = n^r\sin\left(nx + r\frac{\pi}{2}\right);$$

on obtiendra de la même manière

(8) $$u = \cos nx; \quad \frac{d^r u}{dx^r} = n^r \cos\left(nx + r\frac{\pi}{2}\right).$$

(9) $$u = \varepsilon^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta);$$

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon^{x\cos\theta}[\cos(x\sin\theta)\cos\theta - \sin(x\sin\theta)\sin\theta];$$

$$= \varepsilon^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + \theta);$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\varepsilon^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + \theta) = \varepsilon^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + \theta + \theta);$$

$$= \varepsilon^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + 2\theta).$$

On trouvera enfin

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \varepsilon^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + r\theta).$$

(Murphy, *Cambridge Transactions*, vol. V, p. 342.)

(10) $$u = \varepsilon^{ax}\cos nx; \quad \frac{du}{dx} = \varepsilon^{ax}(a\cos nx - n\sin nx).$$

Soit

$$\frac{n}{a} = \operatorname{tang}\varphi,$$

de sorte que

$$a = (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi, \qquad n = (a^2 + n^2)\sin\varphi;$$

on aura

$$\frac{du}{dx} = (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{ax}(\cos\varphi\cos nx - \sin\varphi\sin nx);$$

$$= (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{ax}\cos(nx + \varphi).$$

Et en continuant

$$\frac{d^r u}{dx^r} = (a^2 + n^2)^{\frac{r}{2}}\varepsilon^{ax}\cos(nx + r\varphi).$$

De même, si

$$u = \varepsilon^{ax}\sin nx, \quad \frac{d^r u}{dx^r} = (a^2 + n^2)^{\frac{r}{2}}\sin(nx + r\varphi).$$

(11) $u = \log x$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$;

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\,\frac{1}{x} = (-)^{r-1}(r-1)(r-2)\ldots 3.2.1\,\frac{1}{x^r}.$$

(12) $u = \frac{1+x}{1-x}$; $\frac{du}{dx} = \frac{2}{(1-x)^2}$;

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\,\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2.r(r-1)\ldots 3.2}{(1-x)^{r+1}}.$$

Lorsque les fonctions sont composées du produit de deux ou de plusieurs fonctions simples, on peut faire usage du théorème de Leibnitz, dont voici l'énoncé.

Soient u, v deux fonctions de x, on aura

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = v\frac{d^r u}{dx^r} + r\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2}\,\frac{d^2 v}{dx^2}\,\frac{d^{r-2}u}{dx^{r-2}} + \ldots$$

(*Commer. Epis.* LEIBN. et BERN., vol. I, p. 46, 99.)

(13) $uv = x^n(1-x)^n$;

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = n(n-1)\ldots(n-r+1)(1-x)^n x^{n-r}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 - \frac{r.n}{n-r+1}\cdot\frac{x}{1-x} \\ + \frac{r(r-1)}{1.2}\,\frac{n(n-1)}{(n-r+1)(n-r+2)}\cdot\frac{x^2}{(1-x)^2} - \ldots \end{array}\right].$$

Si $r = n$

$$\frac{d^n[x^n(1-x)^n]}{dx^n} = n(n-1)\ldots 3.2.1$$

$$\left\{(1-x)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2(1-x)^{n-1}x + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(1-x)^{n-2}x^2 - \ldots\right\}.$$

(MURPHY's *Electricity*, p. 7.)

(14) $uv = \varepsilon^{ax}x^n$,

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = \varepsilon^{ax}\left[a^r x^n + rna^{r-1}x^{n-1} + \frac{r.(r-1)}{1.2}\,n(n-1)a^{r-2}x^{n-2} + \ldots\right].$$

De même, si

$$uv = \varepsilon^{ax} x^r,$$

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \varepsilon^{ax}\left[a^n x^r + n \cdot r a^{n-1} x^{r-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r(r-1) a^{n-2} x^{r-2} \ldots\right].$$

En comparant ces expressions, on trouve que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r \varepsilon^{ax} x^n = a^{r-n} x^{n-r} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \varepsilon^{ax} x^r.$$

(15) $$uv = x^n \log x,$$

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = n(n-1)\ldots(n-r+1)\, x^{n-r}$$
$$\left[\begin{array}{l} \log x + r \cdot \dfrac{1}{n-r+1} - \dfrac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{1}{(n-r+1)(n-r+2)} \\ \qquad + \dfrac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dfrac{1 \cdot 2}{(n-r+1)\ldots(n-r+3)} \end{array}\right] + \ldots.$$

Si $r = n$,

$$\frac{d^n(x^n \log x)}{dx^n} = n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$\left[\log x + \frac{n}{1^2} - \frac{n(n-1)}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot 1 \cdot 2}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} - \ldots\right].$$

(16) $$uv = \frac{(a+x)^m}{(c+x)^n},$$

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = m(m-1)\ldots(m-r+1)\frac{(a+x)^{m-r}}{(c+x)^n}$$
$$\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{r}{1} \dfrac{n}{m-r+1} \cdot \dfrac{a+x}{c+x} \\ \quad + \dfrac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{n(n+1)}{(m-r+1)(m-r+2)} \cdot \dfrac{(a+x)^2}{(c+x)^2} + \ldots \end{array}\right].$$

(17) $$uv = \varepsilon^{ax} \cos nx \cdot x^m.$$

Dans ce cas, supposons

$$u = \varepsilon^{ax} \cos nx; \quad v = x^m.$$

Alors, par l'ex. (10), si

$$\frac{n}{a} = \operatorname{tang}\varphi, \quad \frac{d^p u}{dx^p} = (a^2 + n^2)^{\frac{p}{2}} \varepsilon^{ax} \cos(nx + p\varphi).$$

Développant ensuite $\frac{d^r(uv)}{dx^r}$ par le théorème de Leibnitz,

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = \varepsilon^{ax}(a^2+n^2)^{\frac{r}{2}} \Bigg[x^m \cos(nx + r\varphi)$$

$$+ r.mx^{m-1} \frac{\cos[nx + (r-1)\varphi]}{(a^2+n^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{r.(r-1)}{1.2} m(m-1) x^{m-2} \frac{\cos[nx + (r-2)\varphi]}{(a^2+n^2)} + \ldots \Bigg].$$

Soit

$$(18) \qquad uv = \varepsilon^{ax}.X;$$

X étant une fonction quelconque de x, faisons

$$u = X, \quad v = \varepsilon^{ax},$$

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = \varepsilon^{ax}\left[\frac{d^r X}{dx^r} + r.a\frac{d^{r-1}X}{dx^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2}a^2\frac{d^{r-2}X}{dx^{r-2}} + \ldots\right]$$

$$= \varepsilon^{ax}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^r + r.a\left(\frac{d}{dx}\right)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2}a^2\left(\frac{d}{dx}\right)^{r-2} + \ldots\right]X$$

$$= \varepsilon^{ax}\left(\frac{d}{dx} + a\right)^r X.$$

Il s'ensuit que

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)^r X = \varepsilon^{-ax}\left(\frac{d}{dx}\right)^r(\varepsilon^{ax}X).$$

Ce résultat, généralisé, est de grande importance dans la solution des équations différentielles.

Si la fonction à différentier est de la forme

$$(a + bx + cx^2)^n,$$

on peut en déterminer la différentielle générale en la décomposant en deux facteurs du premier degré tels que $(x+\alpha)(x+\beta)$, et en différentiant le produit $(x+\alpha)^n (x+\beta)^n$ par la formule de Leibnitz; mais au lieu de recourir à cette méthode, nous nous servirons de deux formules dues à Lagrange. (*Mém. de Berlin*, 1772, page 213.)

Soit

$$(u)^n = (a+bx+x^2)^n, \quad u' = b + 2cx.$$

En substituant $x+h$ à x dans u^n, cette expression devient

$$(u+u'h+ch^2)^n;$$

et $\frac{d^r u}{dx^r}$ sera le coefficient de $\frac{h^r}{1.2\ldots r}$ dans le développement de ce trinôme.

En le développant comme un binôme dont $u+u'h$ formerait le premier terme, on obtient

$$(u+u'h)^n + n(u+u'h)^{n-1}ch^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(u+u'h)^{n-2}c^2h^4 + \ldots$$

Développant ensuite chaque binôme, et ne prenant que les termes qui multiplient h^r, on trouve que le terme donné par

$$(u+u'h)^n$$

est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} u^{n-r}u'^r;$$

par

$$(u+u'h)^{n-1}h^2$$

est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-2)} u^{n-r+1}u'^{r-2};$$

par

$$(u+u'h)^{n-2}h^4$$

est

$$\frac{(n-2)\ldots(n-r+3)}{1.2\ldots(r-4)}u^{n-r+2}u'^{r-4}\ \ldots$$

Rassemblons ces termes et multiplions-les par $1.2\ldots r$, nous obtiendrons pour le $r^{\text{ième}}$ coefficient différentiel de u^n

$$\frac{d^r(u)^n}{dx^r}=n(n-1)\ldots(n-r+1)u^{n-r}u'^r\left[1+\frac{r(r-1)}{1.(n-r+1)}\frac{cu}{u'^2}\right.$$
$$\left.+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2\,(n-r+1)(n-r+2)}\frac{c^2u^2}{u'^4}+\ldots\right].$$

On peut obtenir une formule plus commode en développant l'expression proposée d'une autre manière :

$$(u+u'h+ch^2)^n=u^n\left(1+\frac{u'}{u}h+\frac{c}{u}h^2\right)^n$$
$$=u^n\left[\left(1+\frac{u'}{2u}h\right)^2+\frac{4uc-u'^2}{4u^2}h^2\right]^n.$$

Supposons

$$4uc-u'^2=4ac-b^2=e^2,$$

on trouvera, en développant

$$u^n\left[\left(1+\frac{u'}{2u}h\right)^2+\frac{e^2}{(2u)^2}h^2\right]^n$$

par la formule du binôme,

$$u^n\left[\begin{array}{l}\left(1+\frac{u'}{2u}h\right)^{2n}+n\left(1+\frac{u'}{2u}h\right)^{2n-2}\frac{e^2}{(2u)^2}h^2\\ \quad+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(1+\frac{u'}{2u}h\right)^{2n-4}\frac{e^4}{(2u)^4}h^4+\ldots\end{array}\right],$$

et la $r^{\text{ième}}$ différentielle de u^n sera le coefficient de h^r dans ce développement multiplié par $1.2\ldots r$.

Développons chaque terme par la formule du binôme, nous aurons, pour le coefficient de h^r, dans le premier

terme,

$$\left(\frac{u'}{2}\right)^r \frac{1}{u^r} \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-r+1)}{1.2\ldots r};$$

dans le deuxième terme,

$$\left(\frac{u'}{2}\right)^{r-2} \frac{1}{2^2 u^r} \frac{(2n-2)\ldots(2n-r+1)}{1.2\ldots(r-2)} \frac{n}{1} c^2;$$

dans le troisième terme,

$$\left(\frac{u'}{2}\right)^{r-4} \frac{1}{2^4 u^r} \frac{(2n-4)\ldots(2n-r+1)}{1.2\ldots(r-4)} \frac{n(n-1)}{1.2} c^4;$$

et ainsi de suite. Rassemblons ces termes et multiplions-les par $1.2\ldots r$, il viendra

$$\frac{d^r(u)^n}{dx^r} = 2n(2n-1)\ldots(2n-r+1)\left(\frac{u'}{2}\right)^r u^{n-r}\left[1+\frac{n}{1}\frac{r(r-1)}{2n(2n-1)}\frac{c^2}{u'^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2n(2n-1)\ldots(2n-3)}\frac{c^4}{u'^4}+\ldots\right] \quad \text{(B)}$$

Soit

(19) $$u^n = (a^2+x^2)^n.$$

Dans cet exemple,

$$u' = 2x, \quad c = 4a^2,$$

et, si nous faisons $r = n$, nous trouverons, par la formule (B),

$$\frac{d^n(a^2+x^2)^n}{dx^n} = 2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n\left[1+\frac{n^2}{1}\frac{n-1}{2n(2n-1)}\frac{a^2}{x^2} + \frac{[n(n-1)]^2}{1.2}\frac{(n-2)(n-3)}{2n\ldots(2n-3)}\frac{a^4}{x^4}+\ldots\right].$$

Soit

(20) $$u^n = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

La $r^{ième}$ différentielle de cette fonction pourrait être trouvée comme dans l'exemple précédent, mais la méthode suivante nous la donnera sous une forme plus commode en pratique:

$$\frac{1}{a^2+x^2} = -\frac{1}{2a(-)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{x+a(-)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x-a(-)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Différentiant r fois,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r \cdot \frac{1}{a^2+x^2}$$

$$= (-)^{r+1}\frac{r(r-1)\ldots 2.1}{2a(-)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{\left[x+a(-)^{\frac{1}{2}}\right]^{r+1}} - \frac{1}{\left[x-a(-)^{\frac{1}{2}}\right]^{r+1}}\right\}$$

$$= (-)^{r+1}\frac{r(r-1)\ldots 2.1}{2a(-)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\left[x-a(-)^{\frac{1}{2}}\right]^{r+1} - \left[x+a(-)^{\frac{1}{2}}\right]^{r+1}}{(a^2+x^2)^{r+1}}\right\}.$$

Posons maintenant

$$\theta = \tang^{-1}\frac{a}{x},$$

de sorte que

$$x = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\theta, \quad a = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\sin\theta,$$

nous aurons

$$\left[x-a(-)^{\frac{1}{2}}\right]^{r+1} = (a^2+x^2)^{\frac{r+1}{2}}\left[\cos(r+1)\theta - (-)^{\frac{1}{2}}\sin(r+1)\theta\right],$$

$$\left[x+a(-)^{\frac{1}{2}}\right]^{r+1} = (a^2+x^2)^{\frac{r+1}{2}}\left[\cos(r+1)\theta + (-)^{\frac{1}{2}}\sin(r+1)\theta\right]$$

et

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r \cdot \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{(-)^r r(r-1)(r-2)\ldots 2.1}{a}\frac{\sin(r+1)\theta}{(a^2+x^2)^{\frac{r+1}{2}}}.$$

(LIOUVILLE, *Journ. de l'École Polytechn.*, cah. 21, p. 157.)

De la même manière, la fonction

$$(21)\qquad u=\frac{x}{a^2+x^2}$$

nous donnera

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r\frac{x}{a^2+x^2}=(-)^r(r-1)\ldots2.1\,\frac{\cos(r+1)\theta}{(a^2+x^2)^{\frac{r+1}{2}}}.$$

(LIOUVILLE, *Journ. de l'École Polytechn.*, cah. 21, p. 156.)

Ces résultats sont utiles dans la théorie des intégrales définies.

Dans les exemples suivants, les fonctions sont réduites à la forme demandée, en différentiant comme dans l'ex. (11).

Soit

$$(22)\qquad u=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac12}};\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac32}}.$$

D'où

$$\frac{d^r}{dx^r}\,\frac{x}{(1-x^2)^{\frac12}}=\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\,\frac{1}{(1-x^2)^{\frac32}},$$

et par la formule (B),

$$\frac{d^ru}{dx^r}=\frac{3.4\ldots(r+1)x^{r-1}}{(1-x^2)^{r+\frac12}}\left[1+\frac32\,\frac{(r-1)(r-2)}{3\,4}\,\frac{1}{x^2}+\frac{3.5}{2.4}\,\frac{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{3\,4.5.6}\,\frac{1}{x^4}+\ldots\right].$$

$$(23)\qquad u=\sin^{-1}\frac{x}{a};\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac12}};$$

$$\frac{d^ru}{dx^r}=\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\cdot\frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac12}}$$
$$=\frac{1.2\ldots(r-1)x^{r-1}}{(a^2-x^2)^{r-\frac12}}\left[1+\frac12\,\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{1.3}{2\,4}\,\frac{(r-1)\ldots(r-4)}{1.2.3\,4}\cdot\frac{a^4}{x^4}+\ldots\right]\text{ par (B).}$$

(24) $$u = \text{tang}^{-1}\frac{x}{a};\quad \frac{du}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2};$$

$$\frac{d^r u}{dx^r} = a\left(\frac{d}{dx}\right)^{r-1}\frac{1}{a^2+x^2}$$
$$= (-)^{r-1}(r-1)(r-2)\ldots 2.1\,\frac{\sin r\theta}{(a^2+x^2)^{\frac{r}{2}}}\text{ par ex. (20).}$$

Dans cette expression

$$\theta = \text{tang}^{-1}\frac{a}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{tang}^{-1}\frac{x}{a}.$$

On peut se servir de la méthode de Lagrange pour la détermination des différentielles successives de fonctions d'une autre forme.

Soit

(25) $$u = \varepsilon^{cx^2}.$$

Si x devient $x+h$; u deviendra

$$\varepsilon^{c(x+h)^2} = \varepsilon^{c(x^2+2xh+h^2)} = \varepsilon^{cx^2}.\varepsilon^{2cxh}.\varepsilon^{ch^2}.$$

Mais

$$\varepsilon^{2cxh} = 1 + 2cxh + \frac{(2cx)^2}{1.2}h^2 + \frac{(2cx)^3}{1.2.3}h^3 + \ldots$$

et

$$\varepsilon^{ch^2} = 1 + ch^2 + \frac{c^2}{1.2}h^4 + \frac{c^3}{1.2.3}h^6 + \ldots$$

Multipliant ces équations membre à membre, en ne prenant que le coefficient de h^r après l'avoir multiplié par $1.2\ldots r$, on trouvera

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \varepsilon^{cx^2}\Big[c^r(2x)^r + r(r-1)c^{r-1}(2x)^{r-2}$$
$$+ \frac{r(r-1)\ldots(r-3)}{1.2}c^{r-2}(2x)^{r-4} + \ldots\Big].$$

Au moyen de cette expression on peut déterminer les différentielles successives de $\cos x^2$ et de $\sin x^2$.

Soit

(26) $$u = \cos x^2 + (-)^{\frac{1}{2}} \sin x^2 = \varepsilon^{(-)^{\frac{1}{2}} x^2}.$$

En différentiant par la méthode précédente,

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \varepsilon^{(-)^{\frac{1}{2}} x^2} \Big[(-)^{\frac{r}{2}} (2x)^r + (-)^{\frac{r-1}{2}} r(r-1)(2x)^{r-2}$$
$$+ (-)^{\frac{r-2}{2}} \frac{r(r-1)\ldots(r-3)}{1.2} (2x)^{r-4} + \ldots \Big].$$

Mais on a généralement

$$(-)^{\frac{p}{2}} = \varepsilon^{(-)^{\frac{1}{2}} p \frac{\pi}{2}},$$

et

$$\varepsilon^{(-)^{\frac{1}{2}} x^2} \varepsilon^{(-)^{\frac{1}{2}} p \frac{\pi}{2}} = \cos\left(x^2 + p\frac{\pi}{2}\right) + (-)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x^2 + p\frac{\pi}{2}\right).$$

Faisant ces substitutions et se rappelant que

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r \cos x^2 + (-)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^r \sin x^2,$$

on trouve enfin, en séparant les quantités réelles et imaginaires :

$$\frac{d^r(\cos x^2)}{dx^r} = (2x)^r \cos\left(x^2 + r\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ r(r-1)(2x)^{r-2} \cos\left[x^2 + (r-1)\frac{\pi}{2}\right]$$
$$+ \frac{r(r-1)\ldots(r-3)}{1.2} (2x)^{r-4} \cos\left(x^2 + (r-2)\frac{\pi}{2}\right) + \ldots,$$

et

$$\frac{d^r(\sin x^2)}{dx^r} = (2x)^r \sin\left[x^2 + r\frac{\pi}{2}\right]$$
$$+ r(r-1)(2x)^{r-2} \sin\left[x^2 + (r-1)\frac{\pi}{2}\right]$$
$$+ \frac{r(r-1)\ldots(r-3)}{1.2} (2x)^{r-4} \sin\left[x^2 + (r-2)\frac{\pi}{2}\right] + \ldots.$$

Soit

(27) $$u = \frac{1}{\varepsilon^x + 1}.$$

Nous pourrions dans ce cas développer la fonction et différentier r fois chacun des termes du développement; mais, comme cette marche nous donnerait la valeur de $\frac{d^r u}{dx^r}$ sous forme d'une série infinie, la méthode suivante, due à Laplace (*Mém. de l'Acad.*, 1777, p. 108), est préférable.

On s'aperçoit aisément, en effectuant deux ou trois différentiations, que $\frac{d^r u}{dx^r}$ doit être de la forme

$$\frac{a_r \varepsilon^{rx} + a_{r-1}\varepsilon^{(r-1)x} + a_{r-2}\varepsilon^{(r-2)x} + \ldots + a_1 \varepsilon^x}{(\varepsilon^x + 1)^{r+1}},$$

et multipliant par $(\varepsilon^x + 1)^{r+1}$ on trouvera

$$(\varepsilon^x + 1)^{r+1} \frac{d^r u}{dx^r} = a_r \varepsilon^{rx} + a_{r-1}\varepsilon^{(r-1)x} + \ldots + a_1 \varepsilon^x. \quad (1)$$

Mais

$$u = \varepsilon^{-x} - \varepsilon^{-2x} + \varepsilon^{-3x} - \ldots;$$

donc

$$\frac{d^r u}{dx^r} = (-)^r [1^r \varepsilon^{-x} - 2^r \varepsilon^{-2x} + 3^r \varepsilon^{-3x} - 4^r \varepsilon^{-4x} + \ldots]. \quad (2)$$

De même en développant $(\varepsilon^x + 1)^{r+1}$ nous trouverons

$$(\varepsilon^x + 1)^{r+1} = \varepsilon^{(r+1)x} + \frac{(r+1)}{1}\varepsilon^{rx} + \frac{(r+1)r}{1.2}\varepsilon^{(r-1)x}$$
$$+ \frac{(r+1)r(r-1)}{1.2.3}\varepsilon^{(r-2)x} + \ldots \quad (3)$$

Le produit des équations (2) et (3) étant égal à (1), et cette équation ne contenant qu'un nombre fini de termes à exposants positifs, les termes du produit de (2) par (3)

qui contiennent des exposants négatifs doivent donc se détruire.

En ne prenant que les termes à exposants positifs, on trouvera

$$(\varepsilon^x + 1)^{r+1} \frac{d^r u}{dx^r} = (-)^r \left\{ 1^r \varepsilon^{rx} - \left[2^r - \frac{(r+1)}{1} 1^r \right] \varepsilon^{(r-1)x} \right.$$
$$\left. + \left[3^r - \frac{(r+1)}{1} 2^r + \frac{(r+1)r}{1.2} 1^r \right] \varepsilon^{(r-2)x} + \ldots \right\},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \frac{(-)^r \left\{ 1^r \varepsilon^{rx} - \left[2^r - \frac{(r+1)}{1} 1^r \right] \varepsilon^{(r-1)x} + \left[3^r - \frac{(r+1)}{1} 2^r + \frac{(r+1)r}{1.2} 1^r \right] \varepsilon^{(r-2)x} + \ldots \right\}}{(\varepsilon^x + 1)^{r+1}}.$$

SECTION II. — *Fonctions de deux ou de plusieurs variables.*

Soit u une fonction de deux variables x et y, on aura toujours

$$\frac{d^{r+s} u}{dy^s \, dx^r} = \frac{d^{r+s} u}{dx^r \, dy^s}.$$

Ex. (1). $u = x^m y^n; \quad r = 1; \quad s = 1;$

$$\frac{du}{dx} = m x^{m-1} y^n; \quad \frac{du}{dy} = n x^m y^{n-1};$$

$$\frac{d^2 u}{dy \, dx} = mn x^{m-1} y^{n-1} = \frac{d^2 u}{dx \, dy}.$$

(2) $u = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}; \quad r = 1; \quad s = 1;$

$$\frac{d^2 u}{dy \, dx} = -8xy \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^3} = \frac{d^2 u}{dx \, dy}$$

(3) $u = y^x; \quad r = 1; \quad s = 1;$

$$\frac{du}{dx} = y^x \log y; \quad \frac{du}{dy} = x y^{x-1};$$

$$\frac{d^2 u}{dy \, dx} = y^{x-1}(1 + x \log y) = \frac{d^2 u}{dx \, dy}.$$

(4) $u = \sin(mx + ny)$;

$$\frac{d^r u}{dx^r} = m^r \sin\left(mx + ny + r\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^s u}{dy^s} = n^s \sin\left(mx + ny + s\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^{r+s} u}{dy^s dx^r} = m^r n^s \sin\left[mx + ny + (r+s)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{d^{r+s} u}{dx^r dy^s}.$$

(5) $u = \sin\frac{x}{y}$; $r = 2$; $s = 1$;

$$\frac{d^3 u}{dy\, dx^2} = \frac{2}{y^3}\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y^4}\cos\frac{x}{y} = \frac{d^3 u}{dx^2 dy}.$$

(6) $u = \sin^{-1}\frac{x}{y}$; $r = 1$; $s = 1$;

$$\frac{d^2 u}{dy\, dx} = -\frac{y}{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2 u}{dx\, dy}.$$

(7) $u = \text{tang}^{-1}\frac{x}{y}$; $r = 1$; $s = 1$;

$$\frac{d^2 u}{dy\, dx} = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{d^2 u}{dx\, dy}.$$

(8) $u = x\sin y + y\sin x$; $r = 1$; $s = 1$;

$$\frac{d^2 u}{dy\, dx} = \cos y + \cos x = \frac{d^2 u}{dx\, dy}.$$

(9) $u = \sin x \cos y$; $r = 2$; $s = 2$;

$$\frac{d^4 u}{dy^2 dx^2} = \sin x \cos y = \frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} = \frac{d^4 u}{dx\, dy\, dx\, dy}.$$

En général, dans une fonction d'un nombre quelconque de variables, l'ordre des différentiations est indifférent.

(10) $u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}$;

$$\frac{du}{dx} = \frac{2xy}{a^2 - z^2};\quad \frac{du}{dy} = \frac{x^2}{a^2 - z^2};$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{2x^2yz}{(a^2 - z^2)^2}; \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{2x}{a^2 - z^2} = \frac{d^2u}{dy\,dx};$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz} = \frac{4xyz}{(a^2 - z^2)^2} = \frac{d^2u}{dz\,dx};$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz} = \frac{2x^2z}{(a^2 - z^2)^2} = \frac{d^2u}{dz\,dy};$$

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = \frac{4xz}{(a^2 - z^2)^2} = \frac{d^3u}{dy\,dx\,dz} = \frac{d^3u}{dz\,dx\,dy}$$

$$= \frac{d^3u}{dx\,dz\,dy} = \frac{d^3u}{dy\,dz\,dx} = \frac{d^3u}{dz\,dy\,dx}.$$

(11) $$u = \frac{\varepsilon^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{\varepsilon^2 x(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{d^2u}{dy\,dx};$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz} = -\frac{\varepsilon^2 xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2u}{dz\,dx};$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz} = \frac{\varepsilon^2 x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2u}{dz\,dy}.$$

(12) $$u = \frac{xy}{ax + bz};$$

$$\frac{d^3u}{dz^2\,dy} = \frac{2b^2x}{(ax + bz)^3} = \frac{d^3u}{dy\,dz^2} = \frac{d^3u}{dz\,dy\,dz};$$

$$\frac{d^3u}{dx\,dz^2} = \frac{2b^2y(bz - 2ax)}{(ax + bz)^4} = \frac{d^3u}{dz^2\,dx} = \frac{d^3u}{dz\,dx\,dz}.$$

L'expression générale de la différentielle totale de deux variables est donnée au moyen de ses différentielles partielles par la formule

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n}dx^n + n\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \dots$$

La loi des coefficients est celle du binôme de Newton.

(13) $$u = x^m y^n;$$

$$d^4 u = m(m-1)\ldots(m-3)\Big[x^{m-4} y^n dx^4 + 4\frac{n}{m-3}x^{m-3}y^{n-1}dx^3 dy$$
$$+ 6\frac{n(n-1)}{(m-2)(m-3)}x^{m-2}y^{n-2}dx^2 dy^2$$
$$+ 4\frac{n(n-1)(n-2)}{(m-1)(m-2)(m-3)}x^{m-1}y^{n-3}dx\,dy^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m(m-1)(m-2)(m-3)}x^m y^{n-4}dy^4\Big].$$

(14) $u = \varepsilon^{ax+by};$

$$d^3 u = (a^3 dx^3 + 3a^2 b\,dx^2 dy + 3ab^2 dx\,dy^2 + b^3 dy^3)\,\varepsilon^{ax+by}.$$

(15) $u = \sin mx \sin ny;$

$$d^4 u = (m^4 dx^4 + 6m^2 n^2 dx^2 dy^2 + n^4 dy^4)\sin mx \sin ny$$
$$- 4mn(m^2 dx^3 dy + n^2 dx\,dy^3)\cos mx \cos ny.$$

(16) $u = \log(ax + by);$

$$d^2 u = -(a^2 dx^2 + 2ab\,dx\,dy + b^2 dy^2)\frac{1}{(ax+by)^2}.$$

(17) $u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}};$

$$d^2 u = (y^2 dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2 dy^2)\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(18) $u = \sin^{-1}\frac{x}{y}.$

$$d^2 u = \left[x dx^2 - 2y\,dx\,dy + x\frac{(2y^2 - x^2)}{y^2}dy^2\right]\frac{1}{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il y a un théorème important (dû à Euler) sur les fonctions homogènes d'un nombre quelconque de variables. Ce théorème, par les applications fréquentes qui en sont faites, doit trouver place ici.

Soit u une fonction homogène et algébrique de n dimen-

sions et à r variables $x, y, z, \ldots$,

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz}\cdots = nu.$$

On peut, de cette équation, déduire une série d'équations de la forme

$$x^m\frac{d^m u}{dx^m} + y^m\frac{d^m u}{dy^m} + z^m\frac{d^m u}{dz^m} + \ldots$$
$$+ 1.2\ldots m\Sigma\frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{d}{dy}\right)^\beta\left(\frac{d}{dz}\right)^\gamma\cdots}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots}u$$
$$= n(n-1)\ldots(n-m+1)u,$$

expression dans laquelle

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = m.$$

(Euler, *Calcul différentiel*, p. 188.)

En appliquant ce théorème aux fonctions transcendantes des fonctions algébriques, il faut observer qu'il ne suffit pas que ces dernières soient homogènes, il faut encore qu'elles soient de zéro dimension ; car, autrement, dans le développement de la fonction transcendante, le degré de chaque terme serait différent, et la fonction développée ne serait plus homogène.

Soit

(19) $$u = \frac{y^3 + x^3}{y - x};$$

ici

$$n = 2$$

et

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} = \frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2(y^3 + x^3)}{y - x}.$$

(20) $$u = \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x + y};\quad n = -\frac{1}{2}$$

et

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=-\frac{1}{2}\frac{\left(yx^{\frac{1}{2}}+xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)}{(x+y)^2}=-\frac{1}{2}\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{(x+y)}.$$

(21) $$u=\sin^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}};\quad n=0$$

et

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=\frac{yx-xy}{(x+y)[2y(x-y)]^{\frac{1}{2}}}=0.$$

(22) $$u=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}};\quad n=1;$$

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+2xy\frac{d^2u}{dx\,dy}+y^2\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{x^2y^2-2x^2y^2+x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

(23) $$u=x(2xy+y^2)^{\frac{1}{2}};\quad n=2.$$

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+2xy\frac{d^2u}{dx\,dy}+y^2\frac{d^2u}{dy^2}$$
$$=(3xy^2+2y^3)x^2+2xy(3x^2y+3xy^2+y^3)-x^3y^2$$
$$=2x(2xy+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit u une fonction homogène et symétrique de x et y à n dimensions, de sorte que

(24) $$u=x^nf\left(\frac{y}{x}\right)=y^nf\left(\frac{x}{y}\right):$$

si on la développe par rapport à x, de sorte qu'elle soit de la forme

$$\Sigma(Q_ix^iy^{n-i}),$$

on aura

$$\Sigma[(2i-n)Q_i]=0.$$

En effet, u étant homogène et de n dimensions, on a

$$nu=x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy};$$

et comme cette expression est symétrique en x et y, on doit avoir

$$x\frac{du}{dx} = y\frac{du}{dy},$$

lorsque $x = y$; de sorte que

$$2x\frac{du}{dx} - nu = 0,$$

lorsque $x = y$.

Substituant le développement de u dans cette équation, on obtiendra

$$\Sigma[(2i - n)Q_i x^n] = 0,$$

ou

$$\Sigma[(2i - n)Q_i] = 0 \quad (*).$$

(*) Cette extension d'une des propriétés des fonctions de Laplace a été communiquée à l'auteur par M. Archibald Smith.

CHAPITRE III.

CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

SECTION I. — *Fonctions d'une variable.*

Soit $y = f(x)$, et par conséquent $x = f^{-1}(y)$ (en représentant par f^{-1} la fonction inverse), les coefficients différentiels successifs de y obtenus par rapport à x pourront être transformés en ceux de x par rapport à y, au moyen des formules

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

et ainsi de suite pour les ordres supérieurs.

Le lecteur trouvera la démonstration d'une formule générale pour le changement de la variable du coefficient différentiel de l'ordre n, dans un Mémoire de M. Murphy, inséré dans les *Philosophical Transactions*, 1837, p. 210. Cette formule est naturellement très-compliquée, et la démonstration n'en serait intelligible qu'après l'insertion de nombreux préliminaires que je ne puis donner ici; c'est pourquoi je renvoie le lecteur au Mémoire indiqué.

Si l'on a $u = f(y)$, et $y = \varphi(x)$, de sorte que u puisse être aussi considéré comme fonction de x, les coefficients

différentiels successifs de u par rapport à y pourront être transformés dans ceux de u par rapport à x, au moyen des formules

$$\frac{du}{dy} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{du}{dx}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$$

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\frac{dy}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{du}{dx}\right) - 3\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5}.$$

La formule générale pour cette transformation se trouve dans le Mémoire de M. Murphy mentionné ci-dessus; mais le résultat en est tellement compliqué, qu'il est heureux que nous ayons rarement à en faire usage pour les différentielles des ordres supérieurs, et que des simplifications se présentent ordinairement dans les cas où nous sommes forcés d'y recourir.

Changez la formule

Ex. (1) $$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx} + (y - a)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

en une autre dans laquelle y soit la variable indépendante.

Le résultat donne

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - (y - a)\frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

L'expression du rayon de courbure ayant x pour variable indépendante étant

(2) $$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2x}{dy^2}},$$

devient, en prenant y pour variable,

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

Prenez y pour variable indépendante dans l'équation

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \varepsilon^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

la transformée sera

$$\frac{d^2x}{dy^2} + x - \varepsilon^y = 0.$$

Changez la variable y en x dans l'équation

(4) $$\frac{du}{dy} + \frac{u}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = a,$$

en supposant

$$x = \log\left[y + (1+y^2)^{\frac{1}{2}}\right];$$

résultat,

$$\frac{du}{dx} + u = \frac{a}{2}\left(\varepsilon^x + \varepsilon^{-x}\right).$$

Supposant $y = \varepsilon^x$, prenez x pour variable indépendante dans l'expression

(5) $$y^2\frac{d^2u}{dy^2} + Ay\frac{du}{dy} + Bu = 0;$$

résultat,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (A-1)\frac{du}{dx} + Bu = 0.$$

Il y a une formule très-commode, au moyen de laquelle on peut changer la variable indépendante, de y en x, dans

les expressions de la forme $y^n \dfrac{d^n u}{dy^n}$, et dans l'hypothèse $y = \varepsilon^x$.

Ne prenant que le symbole d'opération, on a

$$(6)\quad y^n\left(\frac{d}{dy}\right)^n = \varepsilon^{nx}\left(\varepsilon^{-x}\frac{d}{dx}\right)^n = \varepsilon^{nx}\left(\varepsilon^{-x}\frac{d}{dx}\right)\left(\varepsilon^{-x}\frac{d}{dx}\right)\left(\varepsilon^{-x}\frac{d}{dx}\right)\ldots$$

à n facteurs.

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\left[\left(\varepsilon^{(n-1)x}\frac{d}{dx}\varepsilon^{-(n-1)x}\right)\left(\varepsilon^{(n-2)x}\frac{d}{dx}\varepsilon^{-(n-2)x}\right)\ldots\left(\varepsilon^{x}\frac{d}{dx}\varepsilon^{-x}\right)\right]\frac{d}{dx};$$

mais, par la formule donnée ex. 18, chap. II, sect. I, on a, généralement,

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right) = \varepsilon^{ax}\frac{d}{dx}\varepsilon^{-ax}.$$

On trouvera donc, par la substitution de ces facteurs binômes,

$$y^n\frac{d^n u}{dy^n} = \left\{\left[\frac{d}{dx} - (n-1)\right]\left[\frac{d}{dx} - (n-2)\right]\ldots\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\frac{d}{dx}\right]\right\}u.$$

Changez la variable indépendante y en x, dans l'hypothèse $y = \cos x$, et dans l'expression

$$(7)\qquad (1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2} - y\frac{du}{dy} + n^2 u = 0,$$

le résultat donne

$$\frac{d^2u}{dx^2} + n^2 u = 0.$$

Changez la variable indépendante y en x, dans l'expression

$$(8)\qquad (1-y^2)^2\frac{d^2u}{dy^2} - 2y(1-y^2)\frac{du}{dy} + \frac{2a}{1-y}u = 0,$$

étant donnée,

$$y = \frac{\varepsilon^{2x} - 1}{\varepsilon^{2x} + 1};$$

résultat,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(\varepsilon^{2x} + 1)u = 0,$$

Changez la variable indépendante dans l'expression

(9) $$(a+y)^3 \frac{d^3u}{dy^3} + 3(a+y)^2 \frac{d^2u}{dy^2} + (a+y)\frac{du}{dy} + bu = 0,$$

dans l'hypothèse

$$x = \log(a+y);$$

résultat,

$$\frac{d^3u}{dx^3} + bu = 0.$$

Transformez x en θ dans l'expression

(10) $$u + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

et dans l'hypothèse

$$x^2 = 4\theta;$$

résultat,

$$u + \frac{du}{d\theta} + \theta\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0.$$

(Fourrier, *Traité de la Chaleur*, page 376.)

Transformez

(11) $$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

en une fonction dans laquelle s soit la variable, étant donnée

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2:$$

résultat,

$$\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}.$$

Transformez

(12) $$p = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

en une fonction de r et de θ, étant données

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Dans ce cas nous considérerons r comme fonction de θ. Différentiant x et y d'après cette hypothèse,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta;$$

par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}.$$

Substituant cette expression, nous trouverons

$$p = \frac{r^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Transformez

(13) $$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$$

en une fonction dans laquelle θ soit la variable indépen-

dante, étant données

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta.$$

Procédant comme dans l'exemple précédent, on trouve

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Exprimez

(14) $$t = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x + y\frac{dy}{dx}}$$

en fonction de r et θ, dans l'hypothèse de

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta;$$

résultat,

$$t = r\frac{d\theta}{dr}.$$

Section II. — *Fonctions de deux ou de plusieurs variables.*

Soit

$$u = f(x, y);$$

pour exprimer $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ en fonction de deux nouvelles variables r et θ, telles que

$$x = \varphi(r, \theta),\quad y = \psi(r, \theta),$$

nous procéderons ainsi qu'il suit. Nous avons

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dr},$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{d\theta}.$$

Éliminant $\frac{du}{dy}$, nous trouverons

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dr}\cdot\frac{dy}{d\theta} - \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{dy}{dr}}{\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dy}{d\theta} - \frac{dy}{dr}\cdot\frac{dx}{d\theta}}.$$

Éliminant $\frac{du}{dx}$, nous obtiendrons

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\frac{du}{dr}\cdot\frac{dx}{d\theta} - \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{dx}{dr}}{\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dy}{d\theta} - \frac{dy}{dr}\cdot\frac{dx}{d\theta}}.$$

Si r et θ sont données en fonctions explicites de x et de y, nous aurons immédiatement

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} + \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dy} + \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dy}.$$

Pour les différentielles successives, on procède de la même manière; et, s'il y a plus de deux variables indépendantes, la seule différence est que les expressions deviennent plus compliquées. Ces cas, toutefois, sont rares.

Si les variables indépendantes entrent sous des intégrales multiples, on ne peut pas substituer directement les valeurs des différentielles données en fonction des nouvelles variables, parce que les unes sont supposées varier lorsque les autres sont constantes. Pour introduire cette condition, on procède comme suit :

Prenons pour exemple l'intégrale double $\iint V\,dx\,dy$, et soient

$$x = \varphi(r, \theta), \quad y = \psi(r, \theta),$$

de sorte que

$$dx = \frac{dx}{dr}dr + \frac{dx}{d\theta}d\theta$$

et

$$dy = \frac{dy}{dr} dr + \frac{dy}{d\theta} d\theta.$$

x variant lorsque y est constant, et *vice versâ*, nous devons poser $dy = 0$ pour trouver x, et $dx = 0$ pour trouver y. Prenons la dernière supposition, nous aurons les deux équations simultanées

$$0 = \frac{dx}{dr} dr + \frac{dx}{d\theta} d\theta, \quad dy = \frac{dy}{dr} dr + \frac{dy}{d\theta} d\theta.$$

Éliminant $d\theta$ entre ces équations, nous trouverons

$$\frac{dx}{d\theta} dy = \left(\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{dr} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\theta}\right) dr.$$

Il suit de cette équation que lorsque

$$dy = 0, \quad dr = 0;$$

et, conséquemment,

$$dx = \frac{dx}{d\theta} d\theta.$$

Substituant ces valeurs dans l'intégrale double, elle devient

$$\iint V\left(\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{dr} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\theta}\right) dr\, d\theta.$$

Si nous avions trois variables x, y, z à transformer en trois autres p, q, r, nous aurions trois équations de la forme

$$dx = P\,dp + Q\,dq + R\,dr;$$
$$dy = P_1\,dp + Q_1\,dq + R_1\,dr,$$
$$dz = P_2\,dp + Q_2\,dq + R_2\,dr,$$

et nous déterminerions dx, en supposant

$$dy = 0 \quad \text{et} \quad dz = 0,$$

puis éliminant ensuite deux des trois quantités dp, dq, dr.

Supposons que nous éliminions les deux dernières, nous aurons

$$dx = M\,dp,$$

M étant fonction de p, q, r. Il suit de là que lorsque

$$dx = 0, \quad dp = 0.$$

Si nous faisons donc varier y en supposant x et z constantes, nous aurons

$$dy = Q_1 dq + R_1 dr,$$
$$0 = Q_2 dq + R_2 dr;$$

et éliminant dr entre ces équations, nous aurons

$$dy = N\,dq,$$

N étant fonction de p, q, r. Il s'ensuit que lorsque

$$dy = 0, \quad dq = 0;$$

et, si nous faisons varier z en considérant x et y comme constantes, nous trouverons

$$dz = R_3 dr,$$

et, par conséquent,

$$dx\,dy\,dz = MNR_3\,dp\,dq\,dr.$$

L'expression générale de M est compliquée, et il est peu important de la donner ici; car sa valeur sera ordinairement trouvée plus rapidement par la considération des conditions particulières d'une transformation donnée, que par substitution dans la formule générale (*).

(*) LAGRANGE, *Mémoires de Berlin*; 1773, page 121.
LEGENDRE, *Mémoires de l'Académie des Sciences*; 1788, page 454.

Transformez

Ex. (1) $$x\frac{dR}{dy}-y\frac{dR}{dx},$$

étant données

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

et, par conséquent,

$$x^2+y^2=r^2,\quad \operatorname{tang}\theta=\frac{y}{x};$$

$$\frac{dR}{dx}=\frac{dR}{dr}\cos\theta-\frac{dR}{d\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}.$$

$$\frac{dR}{dy}=\frac{dR}{dr}\sin\theta+\frac{dR}{d\theta}\,\frac{\cos\theta}{r}.$$

Donc

$$x\frac{dR}{dy}-y\frac{dR}{dx}=\frac{dR}{d\theta}.$$

Cette transformation se présente dans la théorie des planètes.

Transformez

(2) $$x\frac{dR}{dx}+y\frac{dR}{dy},$$

les variables étant les mêmes que dans l'exemple précédent.

Résultat,

$$r\frac{dR}{dr}.$$

Transformez

(3) $$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0,$$

étant donnée

$$x^2+y^2=r^2.$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}=\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{x}{r},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{dr}{dx}\frac{x}{r} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dx}\frac{x}{r^2}$$

$$= \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right);$$

de même

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right);$$

d'où

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{x^2+y^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{2}{r} - \frac{x^2+y^2}{r^3}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Cette équation se présente dans les recherches sur le mouvement des fluides.

Si

(4) $$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

lorsque

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on trouvera

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Transformez

(5) $$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

en fonction de r et de θ, étant données

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

$$\frac{dV}{dy} = \sin\theta\frac{dV}{dr} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{dV}{d\theta},$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \sin^2\theta\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{dV}{dr}$$

$$+ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\left(r\frac{d^2V}{dr\,d\theta} - \frac{dV}{d\theta}\right).$$

La valeur de $\frac{d^2V}{dy^2}$ peut être déduite de celle de $\frac{d^2V}{dx^2}$ en substituant $\frac{\pi}{2} - \theta$ pour θ. On obtient ainsi

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \cos^2\theta\,\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{dV}{dr}$$
$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\left(r\frac{d^2V}{dr\,d\theta} - \frac{dV}{d\theta}\right).$$

Ajoutant ces deux équations, on trouve

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr} = 0.$$

Transformez

(6) $$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

en une fonction de r, θ et φ, étant données

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\sin\theta\cos\varphi.$$

Un léger artifice de calcul nous permettra d'effectuer cette transformation avec une grande facilité.

Posons

$$\rho = r\sin\theta,$$

nous aurons

$$y = \rho\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\varphi,$$
$$\rho = r\sin\theta,\quad x = r\cos\theta.$$

Prenons d'abord les deux variables y et z, nous trouverons, comme dans l'exemple précédent,

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{dV}{d\rho}.$$

Les équations de condition étant semblables, nous trouverons de la même manière

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr}.$$

De plus, en suivant la marche de l'ex. (5),

$$\frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\rho} = \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{dV}{d\theta}.$$

Ajoutant ces trois équations

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\theta^2}$$
$$+ \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{dV}{d\theta} = 0;$$

substituant pour ρ sa valeur et réduisant, il vient

$$r\frac{d^2(rV)}{dr^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{d}{d.\cos\theta}\left(\sin^2\theta\frac{dV}{d.\cos\theta}\right) = 0.$$

Cette équation importante est la base de la théorie mathématique de l'attraction et de l'électricité. L'artifice de calcul que nous avons employé est donné par M. A. Smith dans le *Cambridge mathematical Journal*, vol. I, p. 122.

Transformez l'intégrale double

$$\int\int x^{m-1} y^{n-1} dy\, dx,$$

en une autre dans laquelle u et v soient les variables indépendantes; x, y, u, v étant liées par les équations

(7) $$x + y = u, \quad y = uv.$$

Dans ce cas

$$dy\, dx = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) du\, dv;$$

mais

$$\frac{dx}{du} = 1, \quad \frac{dy}{dv} = u, \quad \frac{dx}{dv} = 0;$$

donc

$$dy\, dx = u\, du\, dv;$$

et, par conséquent,

$$\int\int x^{m-1} y^{n-1} dy\, dx = \int\int u^{m+n-1}(1-v)^{m-1} v^{n-1} du\, dv.$$

Cette transformation est donnée par M. Jacobi, dans le *Journal de Crelle*, vol. XI, p. 307; elle est d'un grand usage dans la recherche des valeurs des intégrales définies.

Transformez l'intégrale double

(8) $$\iint e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

en une autre, dans laquelle r et θ soient les variables indépendantes, étant données

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta;$$

résultat,

$$\iint e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = -\iint e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta.$$

Étant donnés

(9) $$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\sin\theta\cos\varphi,$$

transformez l'intégrale triple

$$\iiint V\,dx\,dy\,dz$$

en une fonction de r, θ et φ.

Nous trouverons, en employant l'artifice de l'ex. (6),

$$\iiint V\,dx\,dy\,dz = \iiint V r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Cette transformation, très-importante, est celle des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires dans l'espace. Si nous faisons $V = 1$,

$$\iiint dx\,dy\,dz$$

sera l'expression du volume d'un solide quelconque rapporté à des coordonnées rectangulaires. Si on le rapporte à des coordonnées polaires, l'expression devient

$$\iiint r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Transformez l'expression

(10) $$\iint dx\,dy\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

en une fonction de θ et φ, étant données

1°. z fonction de x et de y déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

2°. Les quantités θ et φ étant liées par les équations

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi;$$

et, par conséquent,

$$z=c\cos\theta.$$

Dans ce cas

$$\frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta\cos\varphi,\quad \frac{dx}{d\varphi}=-a\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta\sin\varphi,\quad \frac{dy}{d\varphi}=b\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\theta}=-c\sin\theta,\quad \frac{dz}{d\varphi}=0.$$

D'où

$$\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\theta}=ab\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{dz}{d\theta}\cdot\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dz}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\theta}=-bc(\sin\theta)^2\cos\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\theta}\cdot\frac{dx}{d\varphi}-\frac{dz}{d\varphi}\cdot\frac{dx}{d\theta}=ac(\sin\theta)^2\sin\varphi.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions générales pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ et $dx\,dy$, vous trouverez

$$\int\int dx\,dy\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int\int d\theta\,d\varphi\sin\theta\left[a^2b^2(\cos\theta)^2+(c\sin\theta)^2-(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(Ivory, *Phil. Trans.*, 1809.)

CHAPITRE IV.

ÉLIMINATION DE CONSTANTES ET DE FONCTIONS AU MOYEN DE LA DIFFÉRENTIATION.

Ex. (1)
$$y^2 = ax + b. \qquad (1)$$

Pour éliminer b, différentions, et nous aurons

$$2y\frac{dy}{dx} = a. \qquad (2)$$

Pour éliminer a, substituons sa valeur, donnée par l'équation (2), dans l'équation (1), il viendra

$$y^2 = 2xy\frac{dy}{dx} + b.$$

Pour éliminer a et b, différentions l'équation (2), nous aurons

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Éliminez a de l'équation

(2)
$$y = x^n + a\varepsilon^{mx},$$
$$\frac{dy}{dx} - my = (n - mx)x^{n-1};$$

Éliminez a de l'équation

(3)
$$y = ax + \frac{m}{a};$$

résultat,

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + m = 0.$$

Éliminez a et b de l'équation

(4)
$$y - ax^2 - bx = 0;$$

résultat,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0.$$

Eliminez les constantes m et α de

(5) $$y = m\cos(rx + \alpha).$$

Différentiez deux fois

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -r^2 m \cos(rx + \alpha).$$

Multipliez la première équation par r^2 et ajoutez, vous aurez

$$\frac{d^2y}{dx^2} + r^2 y = 0.$$

Éliminez m et a de

(6) $$y^2 = m(a^2 - x^2);$$

résultat,

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminez c de l'équation

(7) $$x - y = c e^{-\frac{x}{x-y}}.$$

Différentiez par logarithmes et éliminez, il viendra

$$x - 2y + y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Éliminez α et β de l'équation

(8) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Différentiant

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0;$$

Différentiant de nouveau

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

d'où

$$y-\beta=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad x-\alpha=\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}.$$

Substituant ces valeurs de $(y-\beta)$ et de $(x-\alpha)$, vous trouverez

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=r^2,$$

équation dans laquelle α et β ne paraissent plus.

Cette expression est celle du carré du rayon de courbure pour une courbe quelconque.

Éliminez m de l'équation

(9) $$(\alpha+m\beta)(x^2-my^2)=m\gamma^2;$$

résultat,

$$\alpha xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(\beta x^2-\alpha y^2-\gamma^2)\frac{dy}{dx}-\beta xy=0.$$

Éliminez a, b et c de l'équation

(10) $$z=ax+by+c,$$

y étant fonction de x. Différentiez deux et trois fois par rapport à x

$$\frac{d^2z}{dx^2}=b\frac{d^2y}{dx^2}\quad\text{et}\quad\frac{d^3z}{dx^3}=b\frac{d^3y}{dx^3},$$

puis éliminant b, vous aurez

$$\frac{d^3z}{dx^3}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

C. D.

Cette équation exprime la condition nécessaire pour qu'une courbe donnée dans l'espace soit plane.

Éliminez les exponentielles de l'équation

$$(11) \qquad y = \frac{\varepsilon^x + \varepsilon^{-x}}{\varepsilon^x - \varepsilon^{-x}};$$

multipliez numérateur et dénominateur par ε^x, il viendra

$$y = \frac{\varepsilon^{2x} + 1}{\varepsilon^{2x} - 1},$$

d'où

$$\varepsilon^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad \text{et} \quad 2x = \log\frac{y+1}{y-1};$$

différentiant

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2.$$

Éliminez l'exposant de

$$(12) \qquad y = (a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}};$$

différentiant par logarithmes, il viendra

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{m}{n}\frac{xy}{a^2 + x^2}.$$

Éliminez les fonctions de l'expression

$$(13) \qquad y = \sin(\log x);$$

résultat,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Éliminez la fonction exponentielle et la fonction circulaire de l'expression

$$(14) \qquad y = a\varepsilon^{mx}\sin nx;$$

différentiant par logarithmes, on trouvera

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = m + n\cot nx;$$

différentiant de nouveau et éliminant $\cot nx$ au moyen de la dernière équation, il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + (n^2 + m^2)y = 0.$$

Éliminez la fonction arbitraire de l'équation

(15) $$z = xy\,\varphi(y);$$

différentiez par rapport à x seulement, vous aurez

$$\frac{dz}{dx} = y\,\varphi(y),$$

et, par conséquent,

$$x\frac{dz}{dx} - z = 0.$$

Eliminez la fonction φ de l'équation

(16) $$y - nz = \varphi(x - mz);$$

différentiez par rapport à x d'abord,

$$-n\frac{dz}{dx} = \varphi'(x - mz)\left(1 - m\frac{dz}{dx}\right);$$

différentiez la même équation par rapport à y,

$$1 - n\frac{dz}{dy} = -m\varphi'(x - mz)\frac{dz}{dy},$$

d'où

$$m\frac{dz}{dx} + n\frac{dz}{dy} = 1.$$

C'est l'équation différentielle des surfaces cylindriques.

Éliminez la fonction φ de l'équation

(17) $$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right);$$

résultat,

$$(x - a)\frac{dz}{dx} + (y - b)\frac{dz}{dy} = z - c.$$

C'est l'équation différentielle des surfaces coniques

4.

Éliminez φ et ψ de l'équation

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right); \tag{18}$$

différentiez par rapport à x,

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{n-2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^{n+1}}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right); \quad (1)$$

différentiez la même équation par rapport à y,

$$\frac{dz}{dy} = x^{n-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + ny^{n-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^n}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right); \quad (2)$$

multipliez (1) par x, (2) par y, puis ajoutez, vous trouverez

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = nz.$$

C'est l'équation différentielle aux fonctions homogènes de n dimensions. Il est bon d'observer que les deux fonctions arbitraires ne sont réellement équivalentes qu'à une seule, car l'équation primitive peut être mise sous la forme

$$z = x^n\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = x^n f\left(\frac{y}{x}\right);$$

c'est pourquoi les deux fonctions disparaissent après une différentiation.

Si vous procédez à une seconde différentiation, vous trouverez

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2z}{dx\,dy} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} = n(n-1)z;$$

pour la troisième différentiation,

$$x^3\frac{d^3z}{dx^3} + 3x^2y\frac{d^3z}{dx^2dy} + 3xy^2\frac{d^3z}{dx\,dy^2} + y^3\frac{d^3z}{dy^3} = n(n-1)(n-2)z,$$

et ainsi de suite pour un ordre quelconque.

Éliminez les fonctions de l'équation

$$z = \varphi(x+at) + \psi(x-at), \tag{19}$$

x et t étant variables,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \varphi''(x+at) + \psi''(x-at),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\varphi''(x+at) + a^2\psi''(x-at);$$

donc

$$\frac{d^2z}{dt^2} - a^2\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Cette équation est celle du mouvement des cordes vibrantes.

Soit

(20) $$z = \varphi\left(\frac{y^2-x^2}{x}\right);$$

éliminez φ, le résultat sera

$$2xy\frac{dz}{dx} + (x^2+y^2)\frac{dz}{dy} = 0.$$

Éliminez φ et ψ de l'équation

(21) $$z = x\varphi(z) + y\psi(z),$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z) + x\varphi'(z)\frac{dz}{dx} + y\psi'(z)\frac{dz}{dx},$$

ou

$$\frac{dz}{dx}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \varphi(z);$$

de même

$$\frac{dz}{dy}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \psi(z).$$

Divisant la première par la seconde,

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = f(z)$$

(par supposition); différentiant par rapport à x,

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx\,dy} = f'(z)\frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2;$$

différentiant par rapport à y,

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} = f'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right)^3;$$

multipliant par $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$, et retranchant, vous trouverez

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

C'est l'équation générale aux surfaces engendrées par une ligne qui repose constamment sur deux lignes données, en demeurant parallèle à un plan donné.

Éliminez les fonctions arbitraires de l'équation

(22) $$z = \varphi(ay + bx)\,.\,\psi(ay - bx);$$

appliquez-y les logarithmes, vous aurez

$$\log z = \log\varphi(ay + bx) + \log\psi(ay - bx).$$

Les fonctions étant arbitraires, leurs logarithmes le seront aussi, et vous pourrez les remplacer par les notations F et f. En différentiant ensuite successivement par rapport à x et à y, vous trouverez

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = b\,F'(ay + bx) - bf'(ay - bx),$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dy} = a\,F'(ay + bx) + af'(ay - bx).$$

Différentiant de nouveau,

$$\frac{1}{z}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = b^2F''(ay + bx) + b^2f''(ay - bx), \quad (1)$$

$$\frac{1}{z}\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{1}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = a^2F''(ay + bx) + a^2f''(ay - bx). \quad (2)$$

Multipliez (1) par a^2, (2) par b^2, puis retranchant, vous obtiendrez pour résultat

$$a^2\left[\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] - b^2\left[\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] = 0.$$

Éliminez les fonctions arbitraires de l'équation

(23) $$xf(\alpha) + y\,\varphi(\alpha) + z\,\psi(\alpha) = 1, \qquad (1)$$

dans laquelle α est fonction de x et y, et z est donnée par l'équation

$$xf'(\alpha) + y\,\varphi'(\alpha) + z\,\psi'(\alpha) = 0, \qquad (2)$$

f', φ', ψ' étant les coefficients différentiels de f, φ, ψ.

Différentiez (1) par rapport à x,

$$[xf'(\alpha) + y\,\varphi'(\alpha) + z\,\psi'(\alpha)]\frac{d\alpha}{dx} + f(\alpha) + \psi(\alpha)\frac{dz}{dx} = 0,$$

par la condition (2), cette équation se réduit à

$$f(\alpha) + \psi(\alpha)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Si vous différentiez de la même manière par rapport à y, vous trouverez

$$\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)\frac{dz}{dy} = 0.$$

Dans ces deux équations les différentielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ étant toutes deux fonctions de α, on peut supposer que l'une est fonction de l'autre, et écrire

$$\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

En éliminant la fonction F de cette équation, il viendra pour résultat

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0.$$

C'est l'équation différentielle aux surfaces développables.

Si

(24) $$u = f(x,\ y) = F(r,\ z),$$

et que

$$r = \varphi(ax + cz) = \psi(ax - by);$$

vous aurez

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx} + \frac{1}{b}\frac{du}{dy} + \frac{1}{c}\frac{du}{dz} = 0.$$

D'abord

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dr}{dx} = \left(a + c\frac{dz}{dx}\right)\varphi'(ax + cz) = a\psi'(ax - by),$$

$$\frac{dr}{dz} = c\varphi'(ax + cz), \quad \frac{dr}{dy} = -b\psi'(ax - by),$$

donc

$$\frac{1}{a}\frac{dr}{dx} + \frac{1}{b}\frac{dr}{dy} = 0,$$

et

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx} + \frac{1}{b}\frac{du}{dy} = \frac{du}{dz}\left(\frac{1}{a}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{b}\frac{dz}{dy}\right):$$

de même

$$\left(a + c\frac{dz}{dx}\right)\varphi'(ax + cz) = a\psi'(ax - by),$$

$$c\frac{dz}{dy}\varphi'(ax + cz) = -b\psi'(ax - by),$$

d'où

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx} + \frac{1}{b}\frac{du}{dy} + \frac{1}{c}\frac{du}{dz} = -\frac{1}{c},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx} + \frac{1}{b}\frac{du}{dy} + \frac{1}{c}\frac{du}{dz} = 0.$$




BIBLIOTECA